



3. Übung zur Vorlesung

ALGORITHMISCHE MATHEMATIK II

(Abgabe: spätestens Dienstag, 26.04.2016, 15:15 Uhr, d.h. vor der Vorlesung)

1. Aufgabe (Votieraufgabe)

4 Punkte

Gegeben seien Polynome $a_mx^m + \dots + a_1x + a_0$ und $b_kx^k + \dots + b_1x + b_0$ mit nicht-negativen Koeffizienten a_i, b_j für alle $i \in \{1, \dots, m-1\}$ und $j \in \{1, \dots, k-1\}$ sowie $a_m, b_k > 0$. Seien $f, g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch $f(n) = a_m n^m + \dots + a_1 n + a_0$ bzw. $g(n) = b_k n^k + \dots + b_1 n + b_0$.

- Sei $h(n) = n^{\max\{m,k\}}$. Zeigen Sie, dass $f(n) + g(n) = \Theta(h(n))$ gilt.
- Sei $m > k$. Zeigen Sie, dass $\frac{f(n)}{g(n)} = \mathcal{O}(n^{m-k})$.
- Gilt $\log(f(n)) = \Theta(\log(n))$? Begründen Sie Ihre Antwort.

2. Aufgabe (Programmieraufgabe)

6 Punkte

Implementieren Sie das Verfahren "Sortieren durch Mischen" aus der Vorlesung (Skript-Seiten 120-128). Hierzu finden Sie auf der Homepage

https://www.math.uni-magdeburg.de/institute/imo/ag_sager/TEACHING/2016AM2

eine .txt-Datei als Input. **Hinweis:** Nutzen Sie beispielsweise die `fstream`-Klasse und hieraus z.B. die Funktionen `ifstream` und `ofstream`.

Hinweise zur Abgabe:

- Zum Testen des Codes nutzen Sie die **input.txt** auf der Homepage, lesen Sie aus dieser Datei Daten in Ihr Programm. Die Formatierung dieser Datei ist wie folgt: Die erste Zahl gibt die Länge der folgenden Liste an; nach dem ersten Leerzeichen folgt eine Liste von Zahlen, die jeweils durch ein Leerzeichen getrennt sind. Geben Sie bitte Ihr Ergebnis ebenso in eine Datei des Formats **output.txt** aus.
- Jede einzelne Datei soll mit einem Kommentar der Form:
% Blatt N Aufgabe A
%Vorname1 Nachname1 Matrikelnummer1
%Vorname2 Nachname2 Matrikelnummer2
beginnen, wobei N die Nummer des Aufgabenblattes und A die Aufgabe bezeichnet.

- Alle zum Kompilieren notwendigen .cpp- und .hpp-Dateien für jede einzelne Aufgabe sollen in einen Ordner mit dem Namen "N_A_Nachname1_Nachname2" gespeichert werden. Alle Ordner sollen einzeln gezippt werden. Die .zip-Dateien sollen zusammen per Mail an die Adresse: clemens.zeile@ovgu.de mit Betreff: "Algorithmische Mathematik 2 Blatt N" gesendet werden. Kommentare in der E-Mail sowie in Textdateien außerhalb des Codes sind nicht notwendig und werden nicht gewertet. Zusätzlich soll der Code in ausgedruckter Form in der Vorlesung mit abgegeben werden.
- Der Code muss so formatiert und kommentiert sein, dass ein Zweiter (der Kontrolleur) in der Lage ist den Code zu verstehen.

3. Aufgabe (zur Abgabe)

5 Punkte

In der Vorlesung wurde folgendes Resultat zu Sortieren-durch-Mischen bewiesen:

Sei A ein Array der Länge n und sei $T(n)$ die Laufzeit von Sortieren-durch-Mischen $(A, 1, n)$. Dann gilt $T(n) = \mathcal{O}(n \log n)$.

Zeigen Sie, dass $T(n) = \Omega(n \log n)$, also insgesamt $T(n) = \Theta(n \log n)$ gilt.

4. Aufgabe (Votieraufgabe)

3 Punkte

Es sei der Zeitaufwand für Sortieren-durch-Einfügen von $n \in \mathbb{N}$ Elementen gegeben durch $c \cdot n^2$, wobei c ein konstanter Skalierungsfaktor ist. Angenommen k Subarrays sind vorsortiert und enthalten insgesamt n Elemente. Um diese zu einem sortierten Array zu verbinden, müssen die jeweils k ersten Elemente der Subarrays verglichen werden, wonach das maximale (absteigende Sortierung angenommen) Element dann in den Array platziert wird. Folglich ist hierfür der Zeitaufwand proportional zu $(k - 1) \cdot n$, es wird angenommen dieser wird durch $c \cdot (k - 1) \cdot n$ gegeben (c wie oben). Analysieren Sie folgende Sortier-Idee:

1. Aufsplitten des Arrays in k Subarrays der Größe n/k . Zu vernachlässigen ist hierbei, dass einer dieser Subarrays größer als n/k sein kann um die Anzahl der zu sortierenden Elemente n beizubehalten.
2. Sortieren der einzelnen Subarrays durch Sortieren-durch-Einfügen.
3. Zusammenfügen der einzelnen Subarrays zu einem sortierten Array.

Finden Sie den optimalen k -Wert dieses Ansatzes und vergleichen Sie die resultierende Zeitkomplexität dieses Sortieralgorithmus mit jener von Sortieren-durch-Einfügen und Sortieren-durch-Mischen.