Otto-von-Guericke Universität Magdeburg
Institut für Mathematische Optimierung
Sommersemester 2016
Prof. Gennadiy Averkov

1. Übung zur Vorlesung

Algorithmische Mathematik II

(Abgabe: spätestens Dienstag, 12.04.2016, 15:15 Uhr, d.h. vor der Vorlesung)

1. Aufgabe (Votieraufgabe) **4 Punkte**

Seien $r, s \geq 0$. Zeigen Sie, dass für $n \in \mathbb{N}$ folgendes gilt:

$$\sum_{k=1}^{n} k^r \log^s k = \Theta(n^{r+1} \log^s n).$$

2. Aufgabe **5 Punkte**

Gegeben seien Funktionen $f, f_1, f_2 : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$. Beweisen Sie die folgenden Aussagen bzw. Ihre Entscheidungen:

(a) $\mathcal{O}(f) + \mathcal{O}(f) \subseteq \mathcal{O}(f)$

(b) $\mathcal{O}(f_1) \cdot \mathcal{O}(f_2) \subseteq \mathcal{O}(f_1 \cdot f_2)$

(c) Seien $f_1(n), f_2(n) \geq 0$ für alle n, dann ist $\max\{f_1, f_2\} \in \Theta(f_1 + f_2)$, wobei $\max\{f_1, f_2\}(n) := \max\{f_1(n), f_2(n)\}$.

(d) Ist $3^{3+n} \in \mathcal{O}(3^n)$?

(e) Ist $3^{3n} \in \mathcal{O}(3^n)$?

3. Aufgabe **4 Punkte**

Sei $x \in \mathbb{R}$. Dann steht $\lfloor x \rfloor$ (**floor** von x) für die größte ganze Zahl m mit $m \leq x$ und $\lceil x \rceil$ (**ceiling** von x) für die kleinste ganze Zahl n mit $x \leq n$. Zeigen Sie, dass:

(a) für jedes $x \in \mathbb{R}$ die Ungleichungen $2x - 1 < \lfloor x \rfloor + \lceil x \rceil < 2x + 1$ gelten.

(b) für jedes $n \in \mathbb{N}$ die Gleichung $\lceil \log_2(n+1) \rceil = 1 + \lfloor \log_2 n \rfloor$ gilt.

(c) für jedes $n \in \mathbb{Z}$ die Gleichung $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + \lceil \frac{n}{2} \rceil = n$ gilt.

4. Aufgabe (Votieraufgabe) **5 Punkte**

Eine Zahl $v \in \mathbb{Z}$ heißt *kleinstes gemeinsames Vielfaches* zweier Zahlen $a, b \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$, $v = \mathrm{kgV}(a, b)$, falls gilt:

1. $a \mid v$ und $b \mid v$;
2. ist $c \in \mathbb{Z}$ eine weitere Zahl mit $a \mid c$ und $b \mid c$, so folgt $v \mid c$;
3. $v \in \mathbb{N}$.

Es wird $\mathrm{kgV}(a, b) = 0$ gesetzt, falls $a = 0$ oder $b = 0$.

Zeigen Sie für alle $a, b \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$:

$$\mathrm{kgV}(a, b) \cdot \mathrm{ggT}(a, b) = |a \cdot b|.$$